

基于高阶M-HODLR算法的复合结构目标电磁响应 高效求解

任 仪^{1*}, 张 扬¹, 李 璿²

(1. 西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071; 2. 北京华大九天科技有限公司, 北京 100102)

摘要: 本文针对金属介质复合结构目标多右端项电磁响应求解效率低下的问题, 提出一种高效稳定的直接求解器算法。首先, 基于M-HODLR架构, 研究适用于金属介质复合结构的基函数分组与M-HODLR算法构建策略。随后, 将高阶电磁建模引入所提金属介质复合结构的M-HODLR算法中, 在保证高精度求解的同时, 显著减少未知量, 有效提高算法效率。最后, 针对高阶电磁建模中的基函数分组策略问题, 研究了基于高阶基函数簇的分组策略, 并将不同层间的基函数进行顺序重排, 结合聚合操作, 实现了M-HODLR中金属介质复合问题的向上聚合。所提高阶电磁建模的M-HODLR算法极大地加速了金属介质复合结构目标电磁响应的求解效率。理论分析与数值算例验证了本文所提方法的有效性。

关键词: 金属介质复合; 高阶基函数; M-HODLR; 多右端项问题

基金项目: 国家自然科学基金(No.62271365, No.U2241203)

中图分类号: TP391.4

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2026)02-0765-09

电子学报URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20251179

Efficient Solution of Electromagnetic Response for Composite Structures Based on High-Order M-HODLR Algorithm

REN Yi^{1*}, ZHANG Yang¹, LI Jin²

(1. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

2. Emphyrean Technology Co., Ltd., Beijing 100102, China)

Abstract: This paper addresses the issue of low computational efficiency in solving electromagnetic responses for multiple right-hand sides in metal-dielectric composite structures by proposing an efficient and stable direct solver algorithm. First, based on the M-HODLR framework, strategies for grouping basis functions and constructing the M-HODLR algorithm suitable for metal-dielectric composite structures are investigated. Subsequently, high-order electromagnetic modeling is integrated into the proposed M-HODLR algorithm for such structures, significantly reducing the number of unknowns while ensuring high solution accuracy, thereby effectively improving computational efficiency. Finally, to address the basis function grouping issue in high-order electromagnetic modeling, a grouping strategy based on clusters of high-order basis functions is developed. By reordering the basis functions across different layers and incorporating aggregation operations, upward aggregation for metal-dielectric composite problems within the M-HODLR framework is achieved. The proposed M-HODLR algorithm with high-order electromagnetic modeling significantly accelerates the solution of electromagnetic responses for metal-dielectric composite structures. Theoretical analysis and numerical examples validate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: metal-dielectric composite structures; high-order basis functions; M-HODLR; multiple right-hand sides

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62271365, No.U2241203)

0 引言

当前, 基于表面积分方程(Surface Integral Equation, SIE)方法的电磁分析技术已成为预测工业设计性能的最主要手段之一, 也是理论和工业应用领域研

究的热点^[1]。在实际电磁工程中, 常遇到目标结构固定但激励状态改变的情况, 即求解不同激励状态下目标的电磁响应问题, 这被称为多右端项问题(Multiple Right-Hand Sides, MRHS)^[2-4], 其广泛存在于微波网络设计^[5-6]、天线阵列分析^[7-8]、遥感^[9]、近场扫描成

像^[10]等领域。对于 MRHS 问题,传统迭代方法求解矩阵系统效率较低,而直接求解器算法因其已构建好系统矩阵的逆矩阵^[11-13],仅需进行逆矩阵与右端项的矩阵向量乘法(Matrix Vector Products, MVP)操作,相比迭代法具有显著优势,已成为 MRHS 问题研究的主要方向之一。

基于 SIE 的直接求解器算法首先需对基函数在空间进行分组,通过判断不同分组间的相容性条件,确定子矩阵块是否压缩成低秩矩阵,并按低秩方法操作以提高计算效率^[5,14-24]。目前,主流的基函数分组策略是将基函数的中心坐标按 xyz 方向分别进行二分法排序。对于不同基函数分组形成的子矩阵块,通过判断其是否满足相容性条件决定是否再细分,最终形成 H 矩阵,并进行相应求解^[11],如基于 H 矩阵的 HLU 算法^[5,14]。另一种基于 H 矩阵的直接求解策略是根据 SWR 公式^[15-16]得到的层次化非对角低秩(Hierarchical ally Off-Diagonal Low-Rank, HODLR)架构^[17-18]及其改进型 M-HODLR^[19],相对于 HLU, HODLR 对非对角矩阵进行聚合再压缩,具有更优的压缩率和求逆效率。文献[20-21]通过采用新型的迭代策略,更适合于高频电磁散射问题。文献[22-23]通过 ID 分解构建稀疏等效矩阵,对理想导体(Perfect Electric Conductor, PEC)和介质问题均有较好的适用性。文献[24]通过插值的方法构造嵌套矩阵,实现低频结构目标的线性复杂度快速求解。然而,现有文献显示,目前大多数直接求解器方法适用于 PEC 目标,而针对介质目标的快速算法研究较少。文献[23]采用强相容性骨架分解技术结合 ID 分解和 PMCHWT 研究了单介质目标的快速直接求解。文献[25]采用 HLU 结合 JMCIE 方法研究了单介质块/离散多介质块目标的求解。若忽略体积分方程场景^[3,26-29]而仅讨论 SIE,则当前公开文献中报道的直接求解器算法仅有少量针对单介质目标,鲜有针对多介质复合目标或复杂金属介质复合结构目标。因此,针对金属介质复合结构的直接求解器算法亟待深入研究。

为解决金属介质复合结构目标 MRHS 问题求解效率低下的问题,本文采用高阶电磁建模结合 M-HODLR 算法加速该问题的求解。首先研究其基函数分组策略,通过将电流 J 和磁流 M 一起分组,实现二分法排序,使各子块计算量均衡。在此基础上,针对 M-HODLR 算法在介质场景中计算效率偏低的问题,引入高阶电磁建模方法,即结合高阶基函数与高阶几何建模,在实现高精度电磁建模的同时,减少未知量个数,提高算法效率,降低内存需求。同时,考虑到金属介质复合目标几何结构的复杂性,引入三角形与四边形混合单元形式,并分别定义相应的高阶基函

数,通过对三角形高阶基函数引入系数修正,使其与四边形高阶基函数满足法向连续性,增加算法建模灵活性。此外,金属介质复合结构在采用二分法分组时,不同层间的基函数编号不一致,导致无法向上聚合操作。针对此问题,本文通过对不同层间基函数编号重新分组排序,从而方便了从细层向粗层的聚合。最终,所提基于高阶电磁建模的 M-HODLR 算法,在求解金属介质复合结构目标的多右端项电磁问题中,表现出了良好的稳定性和高效性。

本文的贡献在于提出了一种适于 PMCHWT 方程的高阶 M-HODLR 算法,实现了金属介质复合结构目标多右端项电磁散射问题的快速求解。

1 公式理论

1.1 金属介质复合结构的 SIE 建模方法

如图 1 所示,假设背景空间 Ω_0 中有一金属介质复合结构 Ω ,则当采用 PMCHWT 方法进行建模时,在不同区域的交界面处将形成等效电磁流 J 和 M ,则区域 Ω_i 内的散射电场 E_i^{sca} 和散射磁场 H_i^{sca} 可表示为

$$E_i^{sca} = j\omega\mu_i \mathcal{L}[J] + \mathcal{K}[M] \quad (1)$$

$$H_i^{sca} = j\omega\varepsilon_i \mathcal{L}[M] + \mathcal{K}[J] \quad (2)$$

其中: j 为虚数单位; ε_i 和 μ_i 分别为对应区域的介电常数和磁导率; \mathcal{L} 和 \mathcal{K} 算子分别表示为

$$\mathcal{L}[X] = \int \left[X(\mathbf{r}') g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{k_i^2} \nabla' \cdot X(\mathbf{r}') \nabla g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (3)$$

$$\mathcal{K}[X] = \int \nabla \times g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') X d\mathbf{r}' \quad (4)$$

其中: k_i 为对应区域的波数; $g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为标量格林函数。对于如图 1 所示的金属介质复合结构,任一界面两侧的区域分别用 p 和 n 表示,则根据面等效原理,最终形成的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} \langle J, \mathcal{L}_p^E - \mathcal{L}_n^E \rangle & \langle J, \mathcal{K}_p^E - \mathcal{K}_n^E \rangle \\ \langle M, \mathcal{K}_p^H - \mathcal{K}_n^H \rangle & \langle M, \mathcal{L}_p^H - \mathcal{L}_n^H \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_J \\ V_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^E \\ b^H \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中: $\langle A, B \rangle$ 表示向量对 A 与 B 的内积; V_J 和 V_M 为待求的电磁流系数矩阵; b^E 和 b^H 分别是电场和磁场的激励向量。若区域 Ω_i 为 PEC 区域,则所对应区域只有电流 J 而没有磁流 M ,式(5)中也将相应去除 M 部分。考虑到式(5)为经典的 SIE 理论,因此式(5)中各部分的具体表达式此处不再给出,具体可参考文献[1,27]。

1.2 高阶建模方法

目前,最主要的基函数形式是基于三角形的 RWG 和基于四边形的 Roof-top 基函数。这两种基函数虽然形式简单,方便使用,但会导致未知量巨大,相应地产生更多的计算量和存储量。为此,一种解决

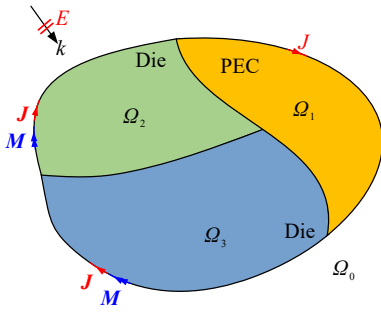


图 1 平面波照射下的金属介质复合结构

Figure 1 Metal-dielectric composite structure under plane wave illumination

方案是使用高阶叠层矢量基函数^[30-31]。目前广泛使用的高阶叠层矢量基函数可分别定义在四边形单元和三角形单元上。其中,基于四边形的叠层基函数通常定义在 9 点的曲面四边形单元上,单元的 9 个控制点坐标表示为 $\mathbf{r}_{i,j}(x,y,z)$, $i,j=1,2,3$ 。通过坐标转化, (x,y,z) 映射到参数坐标范围 $(u,v) \in [-1,1]$ 。其转化关系表示为

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varphi_i(u) \varphi_j(v) \mathbf{r}_{i,j}(x,y,z), \quad i,j=1,2,3 \quad (6)$$

其中, $\varphi_{ij}(u/v)$ 表示插值系数。以 u 向电流 \mathbf{J}^u 为例,可表示为

$$\mathbf{J}^u(u,v) = \frac{\mathbf{a}^u}{\eta} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N-1} \xi_{i,j}^u \tilde{P}(u) P(v) \quad (7)$$

其中: N 是 u 向基函数阶数; $\mathbf{a}^u = \partial \mathbf{r} / \partial u$ 为方向矢量; η 为雅可比因子; $P(v)$ 为勒让德多项式; $\tilde{P}(u)$ 为修正勒让德多项式。则在单元内, u 向基函数总共有 $M^u = N(N+1)$ 个,因此,在单元内的电流可展开表示为

$$\mathbf{J}(u,v) = \frac{\mathbf{a}^u}{\eta} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N-1} \xi_{i,j}^u \tilde{P}(u) P(v) + \frac{\mathbf{a}^v}{\eta} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N-1} \xi_{i,j}^v \tilde{P}(v) P(u) \quad (8)$$

关于四边形高阶叠层矢量基函数的更多细节可参考文献[30]。

另一种常用的形式是定义在三角形单元上的高阶叠层矢量基函数。其单元为 6 点的曲三角形单元,在参数坐标系下,其参数由 (u,v,w) 表示,并且满足 $w = 1 - u - v, (u,v,w) \in [0,1]$ 。则在三角形的三条边上首先定义最低阶基函数(1 阶),表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{10}^e(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\eta} [(u-1)\mathbf{a}^u + v\mathbf{a}^v] \\ \mathbf{F}_{20}^e(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\eta} [u\mathbf{a}^u + (v-1)\mathbf{a}^v] \\ \mathbf{F}_{30}^e(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\eta} [u\mathbf{a}^u + v\mathbf{a}^v] \end{aligned} \quad (9)$$

上式所定义的最低阶基函数只定义在公共边上,其中上标 e 表示定义在边上。当阶数大于 1 阶时,公

共边上会相应地定义高阶基函数部分。以第 1 号局部边上的 3 阶基函数为例,新增加的定义在边上的高阶基函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11}^e(\mathbf{r}) &= \sqrt{3}(v-w)\mathbf{F}_{10}^e \\ \mathbf{F}_{12}^e(\mathbf{r}) &= \frac{\sqrt{5}}{2} [3(v-w)^2 - 1] \mathbf{F}_{10}^e \end{aligned} \quad (10)$$

同样,当基函数增加至 2 阶及以上时,将新增单元内的基函数。以 2 阶基函数和 u 向为例,新增加的单元内基函数为

$$\mathbf{F}_{10}^f(\mathbf{r}) = 2\sqrt{3}u\mathbf{F}_{10}^e \quad (11)$$

其中,上标 f 表示定义在单元内。对于其他阶数的三角形高阶叠层矢量形式则可参考文献[31]。

1.3 M-HODLR 方法

传统的 HODLR 是通过非对角矩阵块进行低秩操作来实现快速计算。该算法中,首先需要根据基函数的空间位置对其进行分组,将空间物理距离相近的基函数分为一组。同时,考虑到计算量的均衡,尽量保证每个分组的未知量个数一致。此时,每个空间上相近的基函数组的耦合在阻抗矩阵中将对应一个小的子矩阵块。当该子矩阵块在阻抗矩阵中为非对角矩阵时,可对该子矩阵块进行 SVD 分解,并对特征值进行数字截断,以去除数值较小的特征值,该操作通常不会对矩阵性态产生明显影响。因此,该非对角矩阵块可按低秩矩阵方式进行处理。如图 2 所示,我们以 3 层分层为例,并将阻抗矩阵标记为 $\mathbf{Z}_{\text{HODLR}}$,则在 HODLR 中, $\mathbf{Z}_{\text{HODLR}}$ 可被分解并表示为

$$\mathbf{Z}_{\text{HODLR}} = \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_0 \quad (12)$$

显然,其逆矩阵可表示为

$$(\mathbf{Z}_{\text{HODLR}})^{-1} = (\mathbf{Z}_0)^{-1} \cdot (\mathbf{Z}_1)^{-1} \cdot (\mathbf{Z}_2)^{-1} \cdot (\mathbf{Z}_3)^{-1} \quad (13)$$

图 2 中,考虑到 \mathbf{Z}_3 为对角线块矩阵,则 \mathbf{Z}_3 的逆即是各小的对角线块矩阵的逆。因各小块尺寸很小,其计算量也很小。而 $\mathbf{Z}_2 \sim \mathbf{Z}_0$ 均由低秩矩阵块组成,则可由 SMW 算法^[15-16]得到,此处不再赘述。

HODLR 中各非对角块均为低秩操作,所以 HODLR 在低秩类算法中具有较高的计算效率。但是我们注意到对于低层时的非对角低秩矩阵块尺寸较

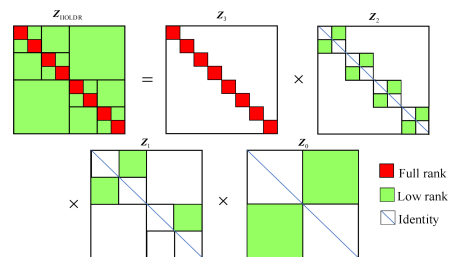


图 2 HODLR 矩阵分块

Figure 2 HODLR matrix partitioning

大(如图2中 \mathbf{Z}_1 和 \mathbf{Z}_2 中的低秩矩阵子块),对于这种大尺寸的子矩阵块在操作时计算量较大,如按传统HODLR操作则不太容易实现。因此,本文采用改进的HODLR算法,即M-HODLR。在该算法中,各矩阵块将根据相容性条件判断矩阵是否再次细分,直到不满足相应的相容性条件。按此思路,任何一个 l 层的低秩矩阵将由其在 $l+1$ 层的4个低秩矩阵(子层的子块)构成。则1层为 $l+1$ 层的父层,相应的 $l+1$ 层为 l 层的子层,父层与所对应的4个子块称之间的转化关系可由下式得到:

$$\mathbf{M}_{m,n}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{m_1,n_1}^{(l+1)} & \mathbf{M}_{m_1,n_2}^{(l+1)} \\ \mathbf{M}_{m_2,n_1}^{(l+1)} & \mathbf{M}_{m_2,n_2}^{(l+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{m_1,n_1}^{(l+1)} \mathbf{V}_{m_1,n_1}^{(l+1)} & \mathbf{U}_{m_1,n_2}^{(l+1)} \mathbf{V}_{m_1,n_2}^{(l+1)} \\ \mathbf{U}_{m_2,n_1}^{(l+1)} \mathbf{V}_{m_2,n_1}^{(l+1)} & \mathbf{U}_{m_2,n_2}^{(l+1)} \mathbf{V}_{m_2,n_2}^{(l+1)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

对 $\mathbf{M}_{m,n}^{(l)}$ 的重新压缩即可得到相应的低秩矩阵^[16]。

2 基于高阶电磁建模的金属介质复合M-HODLR方法

2.1 基于混合单元的高阶建模方法

当采用M-HODLR分析复杂金属介质复合结构时,因为目标结构的复杂性,采用定义在三角形单元上的高阶基函数最为适宜。从效率角度考虑,四边形单元通常比三角形单元有更少的未知量个数,更有利于提高计算效率。但四边形单元通常不利于剖分,尤其是针对复杂结构在采用四边形高阶基函数时,结构的复杂性往往难以得到高质量的四边形网格。为此,另一种可行的方案是采用三角形与四边形的混合单元,两种单元分别采用高阶形式,并定义相应的高阶基函数。此时,每种基函数各自满足散度共形的条件,但是在公共边上,两种基函数所表示的电流分布还需要满足电流在边界上的法向分量的连续性,如图3所示。因此,我们以四边形单元为基准,当考虑公共边时,则四边形一侧的基函数 \mathbf{f}^Q 与三角形一侧的基函数 \mathbf{f}^T 需要满足 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}^Q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}^T$ 条件,由此可推算出需要对三角形单元的基函数进行系数修改。其中 \mathbf{n} 表示沿公共边的外法向。经过计算,以3阶基函数为例,每条边上定义3个基函数,以第1号边为例,原基函数 \mathbf{F}_{10}^e 、 \mathbf{F}_{11}^e 和 \mathbf{F}_{12}^e 修改后分别表示 $\tilde{\mathbf{F}}_{10}^e$ 、 $\tilde{\mathbf{F}}_{11}^e$ 和 $\tilde{\mathbf{F}}_{12}^e$,它们之间满足关系:

$$\mathbf{F}_{10}^e = 0.5 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{10}^e; \mathbf{F}_{11}^e = 0.530333 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{11}^e; \mathbf{F}_{12}^e = 0.883881 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{12}^e \quad (15)$$

在第2和3号边上的关系与此类似。注意,此时只有定义在公共边上的基函数需要做修正,而对于定义在单元内部的基函数因为对公共边上的法向电流连续性有贡献,不需要修正。最终,当考虑电流连续性时,典型的三角形与四边形混合单元上的电流分布

如图3所示。

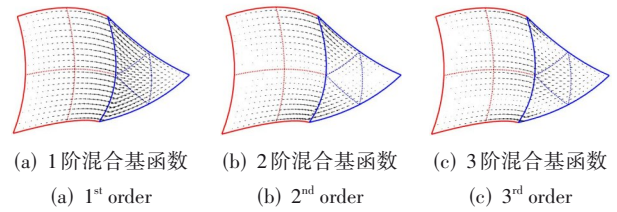


图3 三角形与四边形混合的高阶基函数分布

Figure 3 High-order basis function distribution for mixed triangular and quadrilateral elements

2.2 基于基函数簇的基函数分组方法

与低阶基函数不同,高阶基函数在同一个单元上会定义多个基函数,而低阶基函数仅定义在有公共边的单元对上。通常,为便于分组,对于低阶基函数,我们将基函数描述成定义在公共边上,并将公共边的中心位置记录为基函数的位置,然后按二分法根据基函数的位置进行分组。对于低阶基函数,按传统方法在同一个位置只会定义一个基函数,因此在采用二分法时,很容易实现均匀分组。

然而,对于高阶基函数,由于在同一个位置定义了多个基函数,若按传统的基函数中心定义方式,则会在同一个位置处定义多个基函数。此时,若采用二分法实现均匀分组,则很容易出现定义区域相同的基函数被分配至不同的组,导致两个组间因为存在强耦合而出现较大的秩,最终影响算法效率。因此,针对高阶方法,本文是通过将基函数分簇,按簇中心进行二分法排序来实现基函数分组。此处,所谓基函数簇,是指具有相同定义区域的一系列基函数。对于高阶基函数,定义在相同公共边上的基函数成为一簇,而定义在同一个单元内的基函数也成为一簇,如图4所示。图4中,蓝色表示定义在公共边上的基函数簇,对应基函数定义在该公共边的两个单元内,而红色则表示定义在单元内部的基函数簇,表示基函数只定义在该单元内。显然,对于高阶基函数,每个基函数簇上定义了多个基函数,并且每个簇所包括的基函数个数可以不同。于是,传统的对于基函数的二分法排序转化成了对于基函数簇的二分法排序。即采用二分法,使得两个基函数簇的子组内的基函数尽量接近(而不是相等)。基于基函数簇的二分法排序与传统基函数的二分法排序相同,此处不再描述。

2.3 基于高阶基函数的金属介质复合结构目标

M-HODLR方法

对于金属介质复合结构目标,仍然按上述二分法对基函数进行排序。但此时,相同的基函数簇内,通常会同时包括电流基函数 \mathbf{J} 和磁流基函数 \mathbf{M} 。不妨

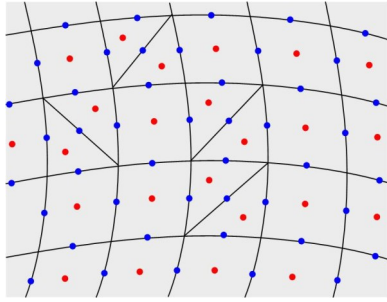


图 4 三角形与四边形混合的高阶基函数中的基函数簇的定义位置
Figure 4 The definition positions of basis function clusters in high-order basis functions for mixed triangular and quadrilateral elements

假定最细层分组的基函数个数为 N_{bottom} , 总共分为 L 层, 并且在 L_i 层假设对应的分组内基函数个数为 N_i . 此时, 按二分法排序得到的是该分组内的基函数簇编号。此时, 若按簇顺序对基函数进行排序, 则在该分组内 \mathbf{J} 和 \mathbf{M} 顺序将出现交错, 将影响阻抗矩阵的填充和 ACA 压缩效率。因此, 为了方便矩阵填充, 需要对该分组内的所有基函数进行重新排序, 使得同一个组内的电流 \mathbf{J} 排在一起, 磁流 \mathbf{M} 排在一起。在本文中, 我们在同一个组内是先排 \mathbf{J} 再排 \mathbf{M} 。当考虑到父层与子层关系时, 在父层与子层内分别需要按该规则进行排列, 如图 5 所示。此时, 父层 L_k-1 与子层 L_k 的基函数编号不再完全相同, 需要建立每一层的基函数编号与上下层的基函数编号的对应关系。

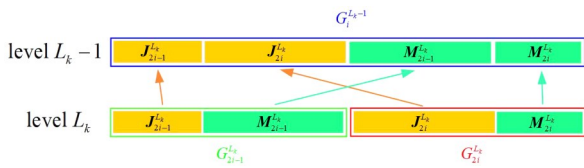


图 5 不同层内的基函数排列关系
Figure 5 Basis function arrangement within different layers

对于金属介质复合目标, 每个子矩阵内都将有 4 个算子 \mathcal{L}^E 、 \mathcal{K}^E 、 \mathcal{L}^H 和 \mathcal{K}^H , 如图 6 所示。由于每个算子对应的子矩阵的性质不同, 对于最底层的矩阵填充, 采用 ACA 策略时, 我们需要将 4 个子块中的每个子矩阵再次按算子分解成 4 个子块, 并分别对每个算子的子块进行填充和 ACA 压缩。待 4 子块完成后, 再按式 (14) 中聚合的方法将 4 子块重新聚合成所需要的子矩阵块的低秩矩阵。而对于非最底层矩阵, 则考虑到其子层已经是按 4 子块的方式进行低秩矩阵运算, 并且子层 L_k 与父层 L_k-1 的基函数编号不同, 所以在进行聚合操作的时候, 需要先对子矩阵块的基权函数编号转换至父层 L_k-1 中的编号, 再进行聚合压缩操作。该变换为基本的初等行列变换操作, 此处不再描述。

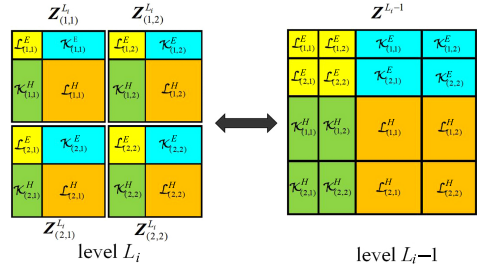


图 6 父层与子层间的矩阵关系
Figure 6 Matrix relationship between parent layer and child layer

3 数值算例

为说明所提算法高阶 M-HODLR 算法在金属介质复合结构多右端项问题分析中的有效性, 此处给出 3 个算例进行分析。需要说明的是, 本文算例的仿真条件均为 Dell T7920 工作站, OMP 并行, 10 线程。

第一个算例用于验证所提方法对于简单金属介质复合结构目标的有效性。仿真场景如图 7 所示, 所研究目标为一放置在空气中的半径 2 m 的介质球, 电参数为 $\epsilon_r = 2.0, \mu_r = 1.0$, 其内包裹一边长 3 m 的 PEC 立方体。球与立方体的中心重合并且均为坐标原点。对于该目标, 均采用曲面四边形单元进行剖分, 并定义相应的四边形单元高阶叠层矢量基函数。其中, 对于介质球表面, 既有电流未知量 \mathbf{J} 又有磁流未知量 \mathbf{M} , 而对于 PEC 立方体, 则只有电流未知量 \mathbf{J} 。仿真频率为 1.0×10^9 Hz, 平面波沿 $-z$ 方向入射, 近场观察点为 (3.0, 4.0, -5.0~5.0) m, 共 201 个观察点。此时, 对于 1 阶基函数, 共生成 95 160 个曲面四边形单元, 相应得到 190 320 个 \mathbf{J} 和 134 832 个 \mathbf{M} 。而对于高阶算法, 则通过控制网格剖分密度, 使得未知量约为 1 阶时的 30%。图 8~图 9 分别给出不同阶数时, 近场散射电场 x 和 z 分量的计算结果。可见, 所提高阶方法与低阶方法的近场计算结果几乎重合。表 1 给出了对于该算例, 在采用不同阶数时的计算信息。通过对比可发现, 高阶算法在填充时间、求逆时间、内存消耗等方面均大幅度优于低阶算法, 结合图 8~图 9, 高阶算法的效率均优于低阶算法, 且可保证相同的计算结果, 具有显著优势。此外, 对于高阶算法本身, 与传统 MOM 类似, 当基函数阶数继续提高时, 算法性能并不会继续提高, 甚至因为基函数过于复杂而降低了各子矩阵块的低秩特性, 从而造成计算量和存储量的增加。因此, 在实际计算中并不建议使用更高阶基函数, 通常 2/3 阶基函数即可满足绝大多数需求。另外, 表 1 中所给数据均为所提高阶算法结合所提 ACA 的计算数据。

第二个算例是空气中放置三块弯曲的介质块结构, 由偶极子激励, 并且收发距离固定时, 模拟测线分析场景。三块弯曲的介质板为同样形状的半环形介

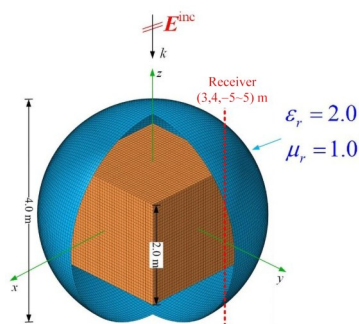


图7 介质球与PEC立方块复合结构的电磁建模

Figure 7 Electromagnetic modeling of the composite structure consisting of a dielectric sphere and a PEC cube

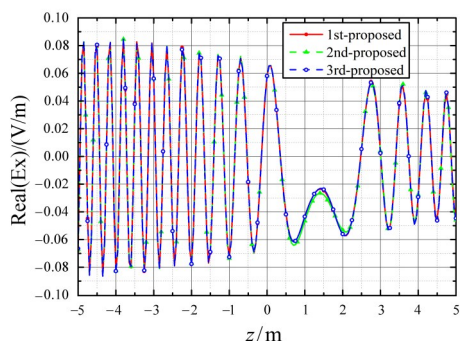


图8 介质球与PEC立方块复合结构的近区散射电磁的x分量

Figure 8 x -component of the near scattered electromagnetic field for the composite structure of a dielectric sphere and a PEC cube

质柱外径为 5 m, 内径为 4 m, 高度为 5 m, 所对应圆柱的中心分别为 $(-10, 2, 0)$, $(0, -7, 0)$, $(5, 7, 0)$ m, 每块介质的电参数分别为 $(\epsilon_r = 1.0, \mu_r = 2.0, \sigma = 0.03)$, $(\epsilon_r =$

表1 介质球与PEC立方块复合结构的仿真计算参数

Table 1 Simulation parameters for the composite structure of dielectric sphere and PEC cube

阶数	四边形单元数	DOFs/(J/M)	层数/最底层个数	填充时间/s	求逆时间/s	近场计算时间/s	内存消耗/(GBytes)
1	95 160	190 320/134 832	11/186	21 189.795	673.056 6	18.68	69.888
2	6 648	52 476/37 136	8/700	1 236.56	101.867 3	3.52	18.405
3	3 264	58 521/43 041	8/794	1 701.18	120.040 2	4.11	28.818

表2 三介质块结构采用不同阶基函数时的计算信息

Table 2 Computational information for the three-medium block structure using different order basis functions

阶数	四边形单元数	DOFs/(J/M)	层数/最底层个数	填充时间/s	求逆时间/s	近场计算时间/s	内存消耗/(GBytes)
1	91392	182 784/182 784	11/300	26 518.60	416.21	2 127.03	54.272
2	5 712	45 696/45 696	8/600	1 020.73	61.07	327.70	12.954
3	2 556	46 008/46 008	8/600	1 098.98	64.33	337.28	18.317

第三个算例为某金属-介质复合无人机结构的单站 RCS。该无人机长 3.953 m、宽 1.203 m、高 0.56 m, 其机身是 PEC, 而机翼为 $\epsilon_r = 3.4$ 的介质结, 如图 12 所示。在 6.0×10^9 Hz 的频率下, 分别考虑 HH 和 VV 极化情况, 在方位平面内计算该无人机的单站 RCS, 采

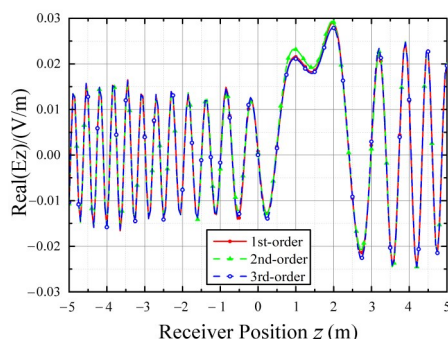


图9 介质球与PEC立方块复合结构的近区散射电磁的z分量

Figure 9 The z -component of the near scattered electromagnetic field for the composite structure of a dielectric sphere and a PEC cube

$2.0, \mu_r = 1.0, \sigma = 0.02)$, $(\epsilon_r = 2.0, \mu_r = 2.0, \sigma = 0.01)$, 背景为空气。所仿真物理模型如图 10 所示, 收发间隔 2 m, 采用 z 向磁偶极子激励, 并且接收 z 向的近区散射磁场, TR 沿 x 轴移动, Rx 从 -20 m 移动至 20 m, 采样间隔 0.1 m, 共 401 个采样点。该算例为典型的 MRHS 问题, 即在固定目标结构的情况下, 根据激励状态的不同而变换右端项, 再计算目标响应, 最后求解电流和近场。通过图 11 可看出, 采用 1 阶基函数的结果与 2、3 阶的结果是几乎相同的, 而通过表 2 可看出, 对于该问题, 高阶方法的计算时间只相当于低阶方法的 4.85%, 内存消耗为 23.87%。可见所提高阶方法对于测线之类 MRHS 问题具有巨大的优势。需要说明的是, 现有公开文献已有大量研究表明直接求解法对于此类多右端项问题的优势明显优于迭代法, 因此, 所提方法与迭代法的对比将不在该论文中继续研究。

样间隔为 0.5 度, 共计 721 个采样点。对于该算例, 无人机的表面被离散为 18 265 个曲面四边形元素和 610 个曲面三角形元素。当采用二阶基函数定义无人机表面的电磁流时, 共生成了 228 534 个 \mathbf{J} 和 68 898 个 \mathbf{M} , 总计 297 432 个 DOFs。在本例中, 运用本文提出的高阶建

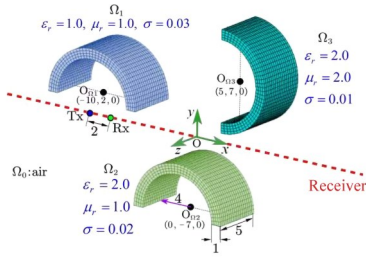
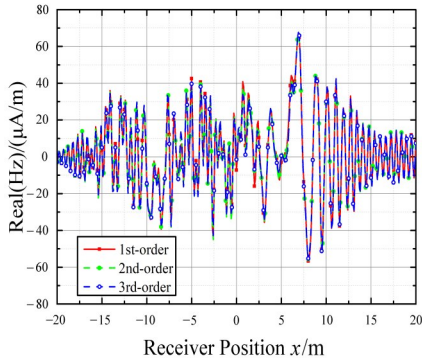


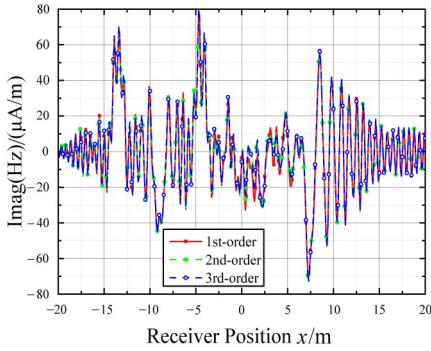
图 10 三介质块结构的测线仿真示意图

Figure 10 Schematic diagram of survey line simulation for three-medium block structure



(a) Hz 分量的实部

(a) Real part of the Hz component



(b) Hz 分量的虚部

(b) Imaginary part of the Hz component

图 11 三介质块结构的测线 Hz 分量仿真结果

Figure 11 Simulation results of the Hz component along the survey line for the three-medium block structure

模 CMDS M-HODLR 方法时,阻抗矩阵填充时间为 4 573.803 s,阻抗矩阵求逆时间为 1 575.894 s,相应的内存消耗为 $63\,972.92 \times 10^6$ B。对于 HH 和 VV 极化状态下的 721×2 种情况,方程求解和 RCS 计算的总时间为 3 872.558 s。相应的计算结果如图 13 所示,其中参考结果是在相同网格下采用高阶 MLFMA 得到的。参考结果使用了 $38\,295.87 \times 10^6$ B 内存,计算时间为 28.01 h。与参考结果相比,HH 和 VV 极化的均方根误差分别

为 0.171 3 dB 和 0.136 4 dB。可以看出,尽管本文提出的方法比传统迭代算法消耗更多的内存,但对于以单站 RCS 计算为代表的 MRHS 问题,本文提出的算法在不降低精度的情况下,展现出了显著的加速优势。

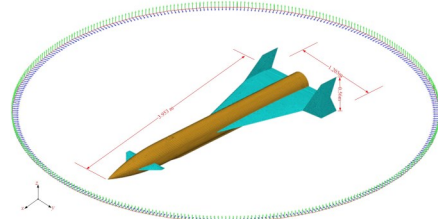
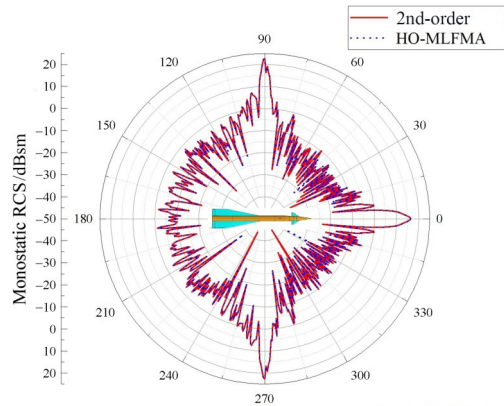


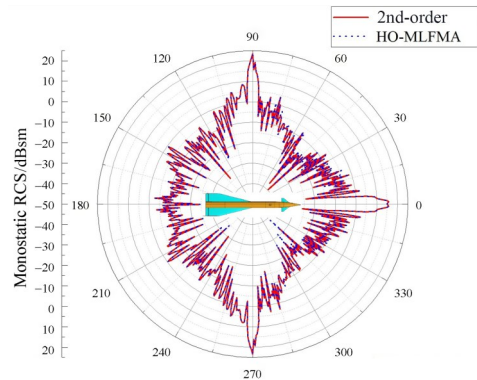
图 12 金属介质复合无人机的仿真模型

Figure 12 Simulation model of the metal-dielectric composite drone



(a) HH 极化

(a) HH polarization



(b) VV 极化

(b) VV polarization

图 13 金属介质复合无人机的单站 RCS

Figure 13 Monostatic RCS of the metal-dielectric composite drone

4 结论

本文针对金属介质复合结构目标多右端项电磁响应快速计算的需求,提出一种基于高阶电磁建模的

直接求解器方法。在该方法中,为提高复杂金属介质复合结构目标的建模灵活性与建模效率,引入三角形与四边形混合单元的高阶基函数,并且对定义在公共边上的高阶基函数系数进行修正,确保不同类型基函数的连续性。对于高阶电磁建模中的基函数分组策略,引入基函数簇的概念,采用二分法对基函数簇进行分组,以保证每个基函数分组内的定义区域不重合,并且保证每个分组内的未知量尽量一致,以保证 M-HODLR 算法计算量的均衡。对于金属介质复合结构目标,将电流和磁流基函数一起分组,研究了在不同层时,各分组间基函数编号的对应关系,方便 M-HODLR 算法中不同层级上的子矩阵块的填充与聚合操作。最后,通过数值算例表明,对于同一个金属介质复合结构的 MRH 问题,采用本文所提的高阶 M-HODLR 算法相比传统的低阶 M-HODLR,计算效率可提升 12 倍,而内存消耗仅为低阶时的 1/4,可见算法效率得到极大提升。

参考文献

- [1] Weng C C, Jin Jianming, Eric M, et al. Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics[M]. Boston: Artech House, 2001.
- [2] Pan Xiaomin, Sheng Xinqing. Fast solution of linear systems with many right-hand sides based on skeletonization[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2016, 15: 301-304.
- [3] Liu Wenqing, He Mang. Accelerating solution of volume-surface integral equations with multiple right-hand sides by improved skeletonization techniques[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2019, 18(10): 2006-2010.
- [4] Ma Miaomiao, Jiao Dan. Accuracy controlled direct integral equation solver of linear complexity with change of basis for large-scale interconnect extraction[C]//2018 IEEE/MTT-S International Microwave Symposium - IMS. Piscataway: IEEE, 2018: 197-200.
- [5] Zhao Yu, Mao Junfa. Equivalent surface impedance-based mixed potential integral equation accelerated by optimized H-matrix for 3-D interconnects[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2018, 66(1): 22-34.
- [6] Fang Xiaoxing, Heldring A, Rius J M, et al. Nested fast adaptive cross approximation algorithm for solving electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2020, 68(12): 4995-5003.
- [7] Maurin J, Barka A, Gobin V, et al. Domain decomposition method using integral equations and adaptive cross approximation IE-ACA-DDM for studying antenna radiation and wave scattering from large metallic platforms[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2015, 63(12): 5698-5708.
- [8] 黄文, 王冲, 周贤超, 等. 加载超表面的宽带低剖面双极化交叉偶极子天线[J]. 电子学报, 2024, 52(2): 477-485.
- [9] Huang Wen, Wang Chong, Zhou Xianchao, et al. Broad-band low-profile dual-polarized crossed-dipole antenna loaded with metasurface[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(2): 477-485. (in Chinese)
- [10] Luo Wan, Nie Zaiping, Chen Yongpin. Fast analysis of electromagnetic scattering from three-dimensional objects straddling the interface of a half space[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2014, 11(7): 1205-1209.
- [11] Wang Yiling, Eibert T F, Nie Zaiping. Adaptive cross approximation algorithm accelerated inverse equivalent current method for near-field antenna measurement[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2019, 67(3): 1874-1883.
- [12] 胡俊, 荣志, 郭翰, 等. 用于电磁散射分析的积分方程快速直接求解法研究及进展[J]. 电波科学学报, 2020, 35(1): 26-33.
- [13] Hu Jun, Rong Zhi, Guo Han, et al. The progress of integral-equation based fast direct solvers for electromagnetic scattering analysis[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2020, 35(1): 26-33. (in Chinese)
- [14] Heldring A, Rius J M, Tamayo J M, et al. Multiscale compressed block decomposition for fast direct solution of method of moments linear system[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(2): 526-536.
- [15] Brick Y, Lomakin V, Boag A. Fast direct solver for essentially convex scatterers using multilevel non-uniform grids[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(8): 4314-4324.
- [16] Yang Minglin, Sheng Xinqing. H-LU-based fast finite element direct solver for 3D scattering problems[C]//2018 IEEE International Conference on Computational Electromagnetics. Piscataway: IEEE, 2018: 1-3.
- [17] Fang Xiaoxiong, Cao Qunsheng, Zhou Ye, et al. Multiscale compressed and spliced Sherman-Morrison-Woodbury algorithm with characteristic basis function method[J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2018, 60(3): 716-724.
- [18] 包扬, 蔡建厂. 基于退化核函数法及 Sherman-Morrison-Woodbury 公式的电磁散射问题的直接求解[J]. 微波学报, 2025, 12(9): 1-8.
- [19] Bao Yang, Cai Jianchang. Direct solution of electromagnetic scattering problem using kernel degeneration method based on Sherman-Morrison-Woodbury formula[J]. Journal of Microwave, 2025, 12(9): 1-8. (in Chinese)
- [20] Ambikasaran S, Darve E. AN O(N log N) fast direct solver for partial hierarchically semi-separable matrices: With application to radial basis function interpolation[J]. Journal of Scientific Computing, 2013, 57(3): 477-501.
- [21] Rong Zhi, Jiang Ming, Chen Yongpin, et al. Fast direct

solution of integral equations with modified HODLR structure for analyzing electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2019, 67(5): 3288-3296.

- [19] Zhang Ningning, Chen Yongpin, Ren Yi, et al. A modified HODLR solver based on higher order basis functions for solving electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2022, 21(12): 2452-2456.
- [20] Guo Han, Liu Yang, Hu Jun, et al. A butterfly-based direct integral-equation solver using hierarchical LU factorization for analyzing scattering from electrically large conducting objects[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(9): 4742-4750.
- [21] Guo Han, Liu Yang, Hu Jun, et al. A butterfly-based direct solver using hierarchical LU factorization for Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai equations[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2018, 60(6): 1381-1387.
- [22] Rong Zhi, Jiang Ming, Chen Yongpin, et al. Strong admissibility skeletonization factorization for fast direct solution of electromagnetic scattering from conducting objects[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 69(10): 6607-6617.
- [23] Jiang Ming, Rong Zhi, Yang Xiong, et al. Analysis of electromagnetic scattering from homogeneous penetrable objects by a strong skeletonization-based fast direct solver[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2022, 70(8): 6883-6892.
- [24] Chai Wensen, Jiao Dan. An H^2 -matrix-based integral-equation solver of reduced complexity and controlled accuracy for solving electrodynamic problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(10): 3147-3159.
- [25] Wan Ting, Xie Min. H-matrix-based direct solver of JMC-FIE for the analysis of scattering from penetrable objects[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2022, 70(9): 8654-8659.
- [26] Vogt A, Reuschel T, Brüns H D, et al. On the treatment of arbitrary boundary conditions using a fast direct H-matrix solver in MoM[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(8): 3670-3676.
- [27] Omar S, Ma Miaomiao, Jiao Dan. Low-complexity direct and iterative volume integral equation solvers with a minimal-rank H^2 -representation for large-scale three-dimensional electrodynamic analysis[J]. IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques, 2017, 2: 210-223.
- [28] 张黎, 童美松. 基于双区域增强体-面积分方程的有损互连结构的低频分析[J]. 电子学报, 2025, 53(6): 1874-1884. Zhang Li, Tong Meisong. Low frequency analysis of lossy interconnect structures based on two region augmented volume surface integral equations[J]. Acta Electronica Sinica, 2025, 53(6): 1874-1884. (in Chinese)
- [29] Gholami R, Menshov A, Okhmatovski V I. H-matrix accelerated solution of surface-volume-surface EFIE for fast electromagnetic analysis on 3-D composite dielectric objects[J]. IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques, 2019, 4: 152-162.
- [30] Jorgensen E, Volakis J L, Meincke P, et al. Higher order hierarchical Legendre basis functions for electromagnetic modeling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(11): 2985-2995.
- [31] Zha Liping, Hu Yunqin, Su Ting. Efficient surface integral equation using hierarchical vector bases for complex EM scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(2): 952-957.

作者简介



任 仪 男, 1982 年 12 月出生于安徽省巢湖市。现为西安电子科技大学电子工程学院教授、博士生导师。主要研究方向为计算电磁学、阵列天线设计与分析。

E-mail: yren@xidian.edu.cn



张 扬 男, 1981 年 10 月出生于四川省成都市。现为西安电子科技大学电子工程学院工程师。主要研究方向为计算流体力学、低速风洞试验、低速风洞设计等。在国内外期刊发表学术论文十多篇。

E-mail: zhangy29v@126.com



李 璘 男, 1980 年 4 月出生于陕西省西安市。现为北京华大九天科技有限公司高级产品经理。主要研究方向为射频技术、雷达系统、卫星通信及多物理场仿真工具研发。

E-mail: lijin1@empyrean.com.cn